

Diskretisierung in Geometrie und Dynamik

Elastische Stäbe und Rauchringe

Alexander I. Bobenko und Boris Springborn

Seit Juli 2012 besteht der DFG Sonderforschungsbereich/Transregio 109 mit dem Titel „Diskretisierung in Geometrie und Dynamik“. ¹ Beteiligt sind die Technische Universität Berlin (Sprecheruniversität), die Technische Universität München und einzelne Mathematiker der Freien Universität Berlin und der Technischen Universitäten Wien und Graz.

Wir beschäftigen uns, ganz allgemein gesagt, mit der Diskretisierung von Begriffen und Methoden zweier klassischer Gebiete der Mathematik: der Differentialgeometrie und der Theorie der Dynamischen Systeme. Beide Disziplinen beschreiben ihre Forschungsgegenstände typischerweise durch Differentialgleichungen. Unter „Diskretisierung“ versteht man generell Verfahren, die Differentialgleichungen in Differenzgleichungen mit endlich vielen oder abzählbar vielen Variablen verwandeln. Aber selbst eine Diskretisierung, die ein glattes dynamisches System mit noch so hoher Genauigkeit approximiert, ist in der Regel ungeeignet, wenn man an qualitativen Eigenschaften des Systems interessiert ist. Eine „gute“ Diskretisierung in unserem Sinne sollte vielmehr die wesentlichen qualitativen Eigenschaften des glatten Systems widerspiegeln. Wenn zum Beispiel im glatten System die Energie erhalten bleibt, sollte es auch nach der Diskretisierung eine entsprechende Erhaltungsgröße geben. Die moderne Theorie der dynamischen Systeme verwendet die Sprache der Differentialgeometrie, und das Teilgebiet, das sich mit solchen strukturerhaltenden Diskretisierungen beschäftigt, heißt „geometrische Integration“.

Auch in der Differentialgeometrie haben sich strukturerhaltende Diskretisierungen als nützlich erwiesen. Hier betrachtet man zum Beispiel polygonale Kurven und poly-

edrische Flächen mit bestimmten Eigenschaften, die qualitativ das gleiche Verhalten zeigen wie die entsprechenden glatten Kurven und Flächen, die in der klassischen Differentialgeometrie untersucht und für gewöhnlich durch nichtlineare partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Als Name für dieses Gebiet an der Schnittstelle von Differentialgeometrie und Diskreter Geometrie hat sich das Oxymoron „Diskrete Differentialgeometrie“ eingebürgert [3].

In diesem Artikel wollen wir anhand eines konkreten und möglichst einfachen und anschaulichen Beispiels, das übrigens wohlbekannt oder sogar klassisch ist, einige kennzeichnende Gesichtspunkte unserer Forschungsrichtung darstellen: das Wechselspiel von Differentialgeometrie und Dynamischen Systemen, zwischen glatter und diskreter Theorie sowie zwischen theoretischen Fragestellungen und praktischen Anwendungen.

I Geometrie und Dynamik: elastische Kurven und sphärische Pendel, elastische Stäbe und Lagrange-Kreisell

Wir beginnen unsere Betrachtungen bei der klassischen *Kirchhoffschen Analogie*. Damit bezeichnet man die Tatsache, dass die Form eines dünnen, an den Enden festgehaltenen elastischen Stabes durch dieselbe Differentialgleichung beschrieben wird wie die Bewegung eines Kreisels (siehe Abbildung 1). Für das Weitere ist ein Spezialfall der Kirchhoffschen Analogie besonders wichtig, dem wir uns zunächst zuwenden: Die Form einer sogenannten elastischen Kurve entspricht der Bewegung eines sphärischen Pendels. Ein Sonderfall dieses Spezialfalls, nämlich die ebenen elastischen Kurven, wurde bereits von Euler behandelt [7] (Abbildung 2).

Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve

$$\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \|\gamma'\| = 1$$

heißt *elastische Kurve*, wenn sie eine kritische Kurve der *Biegeenergie*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2(s) ds \quad (1)$$

ist, wobei κ

$$\kappa = \|\gamma''\|$$

die Krümmung der Raumkurve bezeichnet. Dabei sind zur Variation nur nach der Bogenlänge parametrisierte

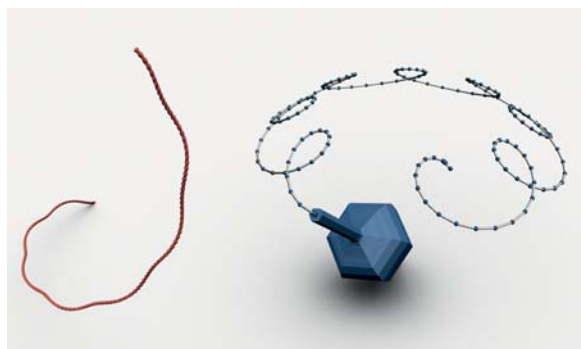


Abbildung 1. Die Form eines dünnen, an den Enden festgehaltenen elastischen Stabes wird durch dieselbe Differentialgleichung beschrieben wie die Bewegung eines Kreisels (Kirchhoffsche Analogie).

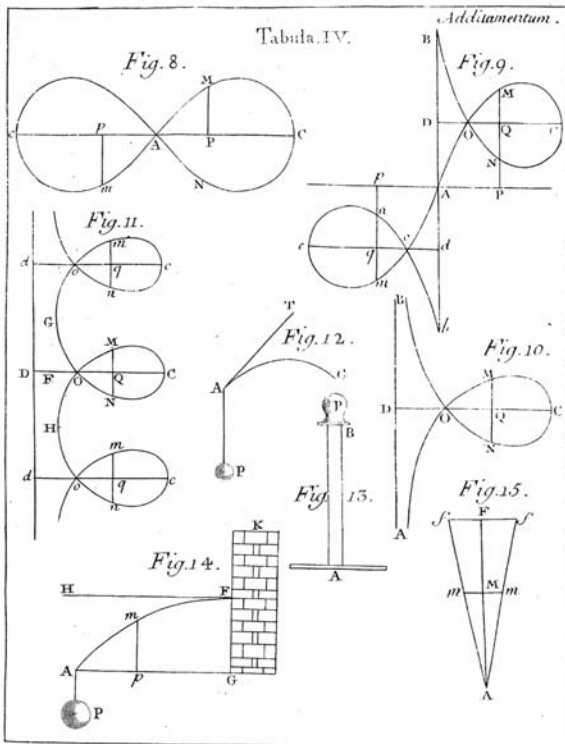


Abbildung 2. Ebene elastische Kurven in Eulers Buch über Variationsrechnung [7]

Kurven mit festen Endpunkten $\gamma(0)$, $\gamma(L)$ und festen Endtangentialen $\gamma'(0)$, $\gamma'(L)$ zugelassen.

Als nächstes wollen wir dieses Variationsproblem für elastische Kurven so umformulieren, dass wir ein Variationsproblem für den Einheitstangentenvektor

$$T = \gamma' \quad (2)$$

erhalten. Dieser bestimmt natürlich die Kurve γ bis auf eine Translation:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \int_0^s T(u) du \quad (3)$$

Eine sphärische Kurve

$$T : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \|T\| = 1 \quad (4)$$

ist genau dann der Einheitstangentenvektor einer elastischen Kurve (3), wenn sie eine kritische Kurve des Funktionals

$$\frac{1}{2} \int_0^L \|T'(s)\|^2 ds$$

ist, wobei zur Variation nur sphärische Kurven mit festen Endpunkten $T(0)$ und $T(L)$ zugelassen sind, die außerdem das Integral

$$\int_0^L T(s) ds = \gamma(L) - \gamma(0) \in \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

unverändert lassen.

Wenn wir jetzt noch Lagrange-Multiplikatoren $p \in \mathbb{R}^3$ für die Zwangsbedingung (5) einführen, erhalten wir folgendes Variationsprinzip:

Eine sphärische Kurve (4) ist genau dann Einheitstangentenvektor einer elastischen Kurve (3), wenn sie für ein $p \in \mathbb{R}^3$ eine kritische Kurve des Funktionals

$$S(T) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \|T'(s)\|^2 - \langle p, T(s) \rangle \right) ds \quad (6)$$

ist, wobei nur sphärische Kurven mit festen Endpunkten zur Variation zugelassen sind.

Der Integrand in Gleichung (6) ist aber gerade die Lagrange-Funktion eines sphärischen Pendels: Die kinetische Energie ist $\frac{1}{2} \|T'\|^2$, und die potentielle Energie ist $\langle p, T \rangle$. Hierbei interpretieren wir s als die Zeit und $-p$ als den Schwerkraftvektor. (Die Masse kann man als gemeinsamen Faktor auch weglassen, und die Pendellänge kommt nicht vor, weil wir sie als Längeneinheit wählen.) Also ist $S(T)$ das Wirkungsfunktional für das sphärische Pendel, und kritische Kurven beschreiben dessen Bewegung.

Damit ist die Kirchhoffsche Analogie für den Spezialfall von elastischen Kurven und sphärischen Pendeln gezeigt. Für den allgemeinen Fall von elastischen Stäben muss man außer der Krümmung auch die Torsion eines dünnen Stabes berücksichtigen. Wir ergänzen den Tangentialvektor T durch zwei Normalenvektoren N_1 und N_2 zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis und betrachten glatte Kurven

$$F : [0, L] \rightarrow SO(3), \quad (7)$$

$$F(s) = (T(s) \ N_1(s) \ N_2(s))$$

in der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$. Solch ein Rahmen F bestimmt durch (3) eine Raumkurve γ (bis auf Translation), und zusätzlich beschreiben die Normalenvektoren N_1, N_2 eine Verdrillung längs γ . Ein elastischer Stab ist eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve γ mit einem Rahmen F , der kritische Kurve des Energiefunktionals

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2} \int_0^L (\kappa^2(s) + \alpha \tau^2(s)) ds, \quad (8)$$

ist. Dabei ist

$$\tau = \langle N'_1, N_2 \rangle \quad (9)$$

die Torsion des Rahmens und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante, die das Verhältnis von Torsionssteifheit und Biegesteifheit des Stabes beschreibt. Zur Variation sind nur Kurven mit Rahmen mit festen Endpunkten $F(0)$, $F(L)$ zugelassen, die außerdem das Integral (5) unverändert lassen.

Wenn man wieder Lagrange-Multiplikatoren $p \in \mathbb{R}^3$ für die Zwangsbedingung (5) einführt, erhält man unter Berücksichtigung von

$$\kappa^2 = \|T'\|^2 = \langle T', N_1 \rangle^2 + \langle T', N_2 \rangle^2$$

mit

$$\kappa_j = \langle T', N_j \rangle$$

das Wirkungsfunktional

$$S(F) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} (\kappa_1^2(s) + \kappa_2^2(s)) + \alpha \tau^2(s) - \langle p, T(s) \rangle \right) ds$$

des *Lagrange-Kreisels*. Dieses dynamische System beschreibt die Bewegung eines rotationssymmetrischen starren Körpers, der sich unter Einfluss der Schwerkraft bewegt, wobei ein Punkt auf der Rotationsachse festgehalten wird – einfach gesagt: einen Kreisel mit spitzer Spitze, die nicht „wandert“. Hierbei interpretieren wir s als die Zeit, $-p$ als den Schwerkraftvektor, κ_1, κ_2, τ als die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten Koordinatensystem und α als eine Konstante, die das Verhältnis der Trägheitsmomente senkrecht und parallel zur Symmetrieachse beschreibt.

Aus der Euler–Lagrange–Gleichung des Variationsprinzips kann man folgende Charakterisierung von elastischen Kurven und Stäben herleiten [4]:

Die Torsion τ eines elastischen Stabes ist konstant, und die Kurve γ genügt der Differentialgleichung

$$\gamma' \times \gamma'' + c\gamma' = p \times \gamma + b, \quad (10)$$

wobei $p, b \in \mathbb{R}^3$ geeignete Konstanten sind und $c = \alpha\tau$. Erfüllt umgekehrt eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ die Differentialgleichung (10), dann beschreibt sie zusammen mit einem Rahmen konstanter Torsion $\tau = c/\alpha$ einen elastischen Stab.

Elastische Kurven entsprechen dem Spezialfall $\alpha = 0$. Die Normalenvektoren und somit überhaupt die Wahl eines Rahmens spielen dann keine Rolle. Die entsprechende Differentialgleichung für elastische Kurven ist demzufolge

$$\gamma' \times \gamma'' = p \times \gamma + b. \quad (11)$$

2 Diskrete elastische Kurven

Statt glatten Kurven, die nach der Bogenlänge parametrisiert sind, betrachten wir nun Polygonzüge mit Kantenlänge 1. Die Ecken bezeichnen wir mit

$$\gamma_1, \dots, \gamma_L,$$

die Kantenvektoren mit

$$T_j = \gamma_{j+1} - \gamma_j,$$

wobei $\|T_j\| = 1$.

Welche Größe soll man als die Krümmung von solchen *diskreten bogenlängenparametrisierten Kurven* auffassen? Es stellt sich heraus, dass für unsere Zwecke

$$\kappa_j = 2 \tan \frac{\phi_j}{2} \quad (12)$$

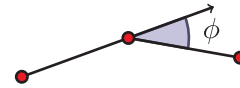


Abbildung 3. Der Außenwinkel ϕ einer diskreten Kurve

eine gute Definition der *diskreten Krümmung* ist, wobei ϕ_j der Außenwinkel an der Ecke γ_j ist (siehe Abbildung 3). Um diese Definition umfassend zu begründen, müssten wir tiefer in die Theorie der integrierbaren Systeme einsteigen, als hier möglich ist. In den Abschnitten 3 und 4 wollen wir versuchen, eine Ahnung vom größeren Zusammenhang zu vermitteln. An dieser Stelle begnügen wir uns mit einer geometrischen Motivation: Die Krümmung einer glatten Kurve ist der Kehrwert des Radius des Schmiegekreeses. Analog dazu ist die diskrete Krümmung (12) der Kehrwert des Radius des Kreises, der zwei aufeinanderfolgende Kanten in ihren Mittelpunkten berührt.

Wenn nun die „Rückstellkraft“ einer diskreten Kurve gleich der diskreten Krümmung (12) ist, dann ist die Biegeenergie pro Ecke gleich

$$\int_0^{\phi} 2 \tan \frac{t}{2} dt = -4 \log \cos \frac{\phi}{2} = 2 \log \left(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right).$$

Wir definieren also: Eine nach der Bogenlänge parametrisierte diskrete Kurve ist eine *diskrete elastische Kurve*, wenn sie ein kritischer Punkt der diskreten Biegeenergie

$$E_d(\gamma) = \sum_{j=1}^{L-1} 2 \log \left(1 + \left(\frac{\kappa_j}{2} \right)^2 \right) \quad (13)$$

ist, wobei die Endpunkte γ_0 und γ_k festgehalten werden. Wegen der Kirchhoffschen Analogie beschreiben die Kantenvektoren einer diskreten elastischen Kurve die Bewegung eines in der Zeit diskretisierten sphärischen Pendels.

Ebenso gibt es auch eine diskrete Version des Energiefunktionals (8). Diese liefert gleichzeitig eine Diskretisierung von elastischen Stäben und von Lagrange-Kreiseln [4][5]. Abbildung 1 zeigt in Wirklichkeit eine diskrete elastische Kurve und einen diskreten Lagrange-Kreisel. Eine modifizierte Version dieses Energiefunktionals für diskrete elastische Stäbe liefert in Anwendungen erstaunlich realistische Simulationen (Abbildungen 4 und 5).

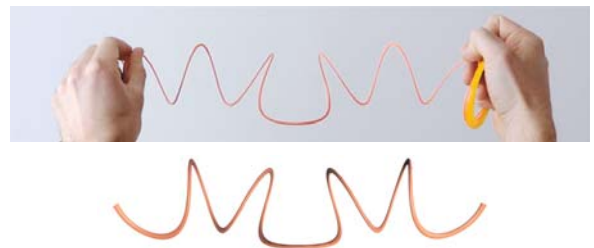


Abbildung 4. Elastischer Stab in Experiment (oben) und Simulation (unten), aus [2]

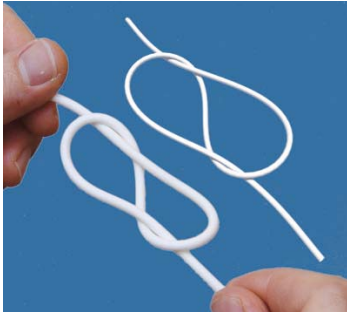


Abbildung 5. „Elastischer Knoten“ in *Experiment und Simulation*, aus [2]



Abbildung 6. Evolution eines Ovals unter dem Rauchring-Fluss, aus [10]. In diesem Beispiel ist die Form der Kurve so gewählt, dass sie sich unter periodischer Formänderung vorwärtsbewegt.

3 Elastische Kurven und Rauchringe

In diesem Abschnitt wollen wir einen Zusammenhang zwischen elastischen Stäben und dem sogenannten Rauchring-Fluss beschreiben, einem dynamischen System aus der Flüssigkeitsmechanik. Diese Verbindung wurde zuerst von Hashimoto bemerkt [9].

Betrachten wir eine inkompressible nicht-viskose Flüssigkeit, die den ganzen \mathbb{R}^3 ausfüllt. Unter geeigneten Annahmen² ist das Geschwindigkeitsvektorfeld v der Strömung durch die Wirbelstärke

$$\omega = \text{rot } v \quad (14)$$

eindeutig bestimmt, und zwar gilt die Biot–Savart-Formel

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - z}{\|x - z\|^3} \times \omega(z) dz. \quad (15)$$

Die Bewegung der Flüssigkeit wird dann durch die Helmholtz-Gleichung für die Wirbelstärke beschrieben:

$$\dot{\omega} = [\omega, v], \quad (16)$$

wobei $[\omega, v] = \nabla_{\omega} v - \nabla_v \omega$ die Lie-Klammer ist. Geometrisch bedeutet die Bewegungsgleichung (16) einfach, dass sich das Rotationsvektorfeld ω „mit der Flüssigkeit mitbewegt“.

Das für einen Rauchring typische Strömungsmuster entsteht, wenn die Wirbelstärke in einer schlauchförmigen Umgebung um eine geschlossene Kurve γ konzentriert ist und längs des Schlauches ausgerichtet ist. Betrachten wir nun den Grenzfall, in dem die Dicke des Schlauches verschwindet und somit die Wirbelstärke nach Art einer δ -Funktion längs der Kurve konzentriert ist. Aus Gleichung (15) wird dann

$$v(x) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{x - \gamma(s)}{\|x - \gamma(s)\|^3} \times \gamma'(s) ds, \quad (17)$$

wobei Γ die Zirkulation der Wirbelstärke längs γ ist. Um die Bewegung des Wirbelfadens γ zu bestimmen, der mit der Flüssigkeit „mitschwimmt“, müsste man das Geschwindigkeitsfeld v auf der Kurve γ auswerten. Leider



Abbildung 7. Evolution eines Polygons unter dem doppelt diskreten Rauchring-Fluss, aus [10]

ist das Integral (17) dort divergent. Man kann sich dadurch behelfen, dass man gleichzeitig mit dem Schlauchradius auch die Wirbelstärke gegen Null gehen lässt. Man erhält dann folgende Differentialgleichung für die Bewegung des Wirbelfadens:

$$\dot{\gamma} = \gamma' \times \gamma''. \quad (18)$$

Diese Evolutionsgleichung wird *localized induction approximation* oder einfach *Rauchring-Fluss* genannt. Sie wurde vermutlich erstmals 1906 von Da Rios, einem Doktoranden Levi-Civitas, veröffentlicht, um dann vergessen und mehrfach wiederentdeckt zu werden [13]. Abbildung 6 zeigt die Evolution einer geschlossenen Kurve unter dem Rauchring-Fluss.

Geometrisch kann man den Rauchring-Fluss (18) so beschreiben: Die nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve γ bewegt sich in Richtung des Binormalenvektors (also senkrecht zum Tangentialvektor T und zum Krümmungsvektor γ'') und zwar mit der Geschwindigkeit κ , der Krümmung der Kurve. Dabei behält γ die Bogenlängenparametrisierung bei. (Letzteres gilt für alle Flüsse senkrecht zur Tangentialrichtung.)

Der Zusammenhang mit elastischen Kurven und Stäben ist folgender: Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve bewegt sich genau dann unter dem Rauchring-

Fluss, ohne ihre Form zu verändern, wenn sie einen elastischen Stab beschreibt. Das folgt aus dem Vergleich der Differentialgleichungen (18) und (10). Die Evolution eines elastischen Stabes ist

$$\dot{\gamma} = -c\gamma' + p \times \gamma + b.$$

Dies ist eine Superposition des *Tangentialflusses*

$$\dot{\gamma} = \gamma', \quad (19)$$

der einfach eine fortschreitende Parameterverschiebung

$$\gamma_t(s) = \gamma_0(s + t)$$

bewirkt, und des Flusses

$$\dot{\gamma} = p \times \gamma + b,$$

der eine euklidische Bewegung der Kurve bewirkt. (Die Lie-Algebra der euklidischen Gruppe des \mathbb{R}^3 besteht gerade aus den Vektorfeldern der Form $v(x) = p \times x + b$.)

4 Integrabilität und Diskretisierung

Für die hier betrachteten dynamischen Systeme ist der Schlüssel zur Diskretisierung die Integrabilität. Der Lagrange-Kreisel ist ein Hamiltonsches System, das integrabel im Sinne von Liouville ist. Der Konfigurationsraum $SO(3)$ ist dreidimensional, und die drei Erhaltungsgrößen sind die Energie und die Komponenten des Drehmoments in Richtung der Kreiselachse und in Richtung der Schwerkraft. Die letzten beiden entsprechen kommutierenden Symmetrien des Systems: Drehung um die Kreiselachse und um die vertikale Achse.

Der Rauchring-Fluss ist ebenfalls ein integrables System. Allerdings ist der Konfigurationsraum – der Raum der Kurven – unendlichdimensional, und Integrabilität ist in einem etwas anderen Sinne zu verstehen. Die moderne Theorie der integrablen Systeme ist ein sehr weites und nicht gerade leicht zugängliches Feld. Das fängt schon damit an, dass es nicht einmal eine griffige allgemeingültige Definition von Integrabilität gibt [15]. Für diskrete Systeme ist die Situation allerdings besser. Diskrete integrable Gleichungen können einheitlich durch Konsistenzigenschaften auf bestimmten Gittern charakterisiert werden [6].

Jedenfalls zeichnet sich der Rauchring-Fluss (18) durch unendlich viele Erhaltungsgrößen aus. Zum Beispiel ist für geschlossene Kurven der Flächeninhaltsvektor

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \oint \gamma(s) \times \gamma'(s) ds$$

konstant. Seine drei Komponenten sind die orientierten Flächeninhalte der Projektionen der Kurve auf die Koordinatenebenen. Eine andere Konstante der Bewegung

ist die Biegeenergie (1). Während der Flächeninhaltsvektor mit einer offensichtlichen Symmetrie des Systems zu tun hat, nämlich mit der Invarianz bezüglich Euklidischer Bewegungen, ist dies für die Biegeenergie nicht der Fall. Man spricht von *versteckten Symmetrien*. Sie bilden eine unendliche Folge von kommutierenden Flüssen und sind ein Kennzeichen der integrablen Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden.

Der springende Punkt ist nun, dass man bei der Diskretisierung des Rauchring-Flusses (und somit von elastischen Stäben und Lagrange-Kreisel) die integrable Struktur erhält. Das ist in der Tat möglich. Ein integrables Analogon zum Rauchring-Fluss für bogenlängenparametrisierte diskrete Kurven (s. Abschnitt 2) ist der *diskrete Rauchring-Fluss*:

$$\dot{\gamma}_j = \frac{2 T_j \times T_{j-1}}{1 + \langle T_j, T_{j-1} \rangle}. \quad (20)$$

(Die entsprechende Evolutionsgleichung für T ist als klassische Heisenberg-Spinkette bekannt [8].) Die Bewegung einer Ecke γ_j ist senkrecht zu den anliegenden Kanten T_{j-1} und T_j , und die Geschwindigkeit ist κ_j , die diskrete Krümmung (12). Der diskrete Rauchring-Fluss erhält den Flächeninhaltsvektor

$$\frac{1}{2} \sum_j \gamma_j \times \gamma_{j+1}$$

und die diskrete Biegeenergie (13) von geschlossenen bogenlängenparametrisierten diskreten Kurven. Die diskreten elastischen Kurven sind genau die Kurven, die sich unter dem diskreten Rauchring-Fluss bewegen, ohne ihre Form zu ändern.

Der kontinuierliche Rauchring-Fluss (18) kommutiert offensichtlich mit dem Tangentialfluss (19), der ja nur eine Umparametrisierung bewirkt. Es gibt auch ein diskretes Analogon des Tangentialflusses. Der *diskrete Tangentialfluss* für bogenlängenparametrisierte diskrete Kurven

$$\dot{\gamma} = \frac{T_j + T_{j-1}}{1 + \langle T_j, T_{j-1} \rangle}$$

ist (bis auf einen konstanten Faktor) dadurch eindeutig charakterisiert, dass er die Kantenlängen erhält und dass $\dot{\gamma}_j$ kollinear mit $T_{j-1} + T_{j+1}$ ist.

Der diskrete Tangentialfluss kommutiert mit dem diskreten Rauchring-Fluss. Der diskrete Rauchring-Fluss ist sogar der einzige Fluss in Richtung von $T_j \times T_{j-1}$, der mit dem Tangentialfluss kommutiert!

5 Rauch aus Rauchringen

Eine Anwendung des diskreten Rauchring-Flusses ist die Simulation von Flüssigkeitsströmungen, indem man sozusagen Rauch aus Rauchringen zusammensetzt (Abbildung 8). Man kann sich nämlich das divergenzfreie Wirbelfeld (14) als eine Faserung des Raumes durch Rauchringe vorstellen, die sich mit der Flüssigkeit mitbewegen, wobei sie deren Geschwindigkeitsfeld nach dem Gesetz

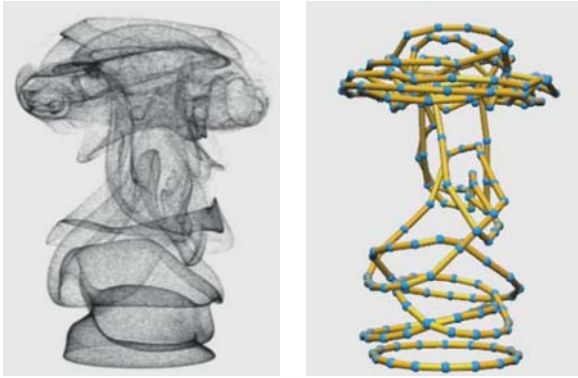
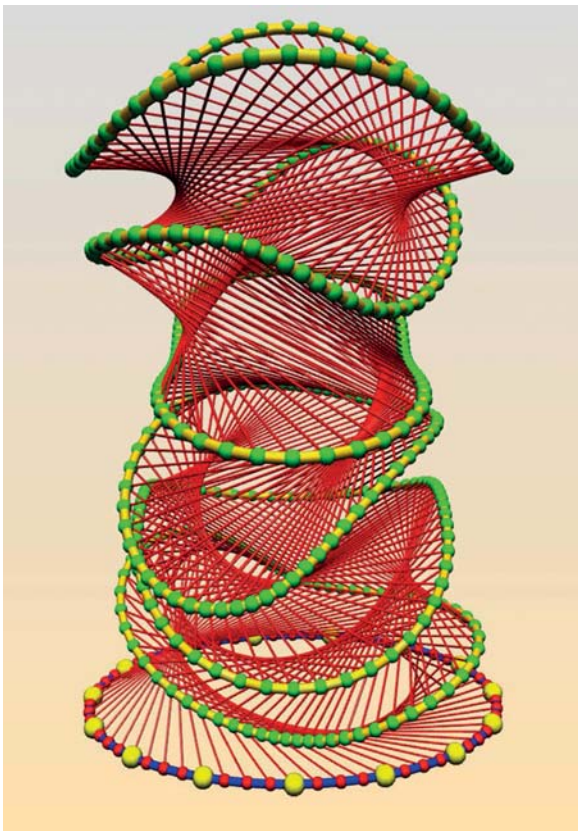


Abbildung 8. Simulation von Rauch mit Hilfe diskreter Rauchringe (Abbildung: Ulrich Pinkall, Steffen Weißmann)



Doppelt diskreter Rauchring-Fluss (Abbildung: Ulrich Pinkall)

von Biot–Savart induzieren [1]. Die Idee ist nun, das Wirbelfeld durch endlich viele polygonale Rauchringe zu ersetzen.

Bis zu einem brauchbaren Verfahren sind dann allerdings noch einige Schritte nötig. Erstens benötigt man einen Rauchring-Fluss, der auch in der Zeit diskretisiert ist, den sogenannten doppelt diskreten Rauchring-Fluss [10] (Abbildungen 7 und 8). Zweitens beschreibt der Rauchring-Fluss als *localized induction approximation* nur die Nahwirkung eines Wirbelfadens auf sich selbst.

Um auch die Fernwirkung realistisch zu beschreiben, muss man zum Rauchring-Fluss eine weitere Komponente hinzufügen [12]. Schließlich muss man verhindern, dass sich die polygonalen Wirbelfäden zu sehr verheddern. Außerdem möchte man nicht nur die Bewegung einer Flüssigkeit beschreiben, die den gesamten Raum ausfüllt. In das Modell müssen noch Hindernisse eingebaut werden, um die die Flüssigkeit herumströmen muss. Als Ergebnis erhält man ein effizientes Verfahren zur Simulation von Flüssigkeitsströmungen, das zum Beispiel in der Computergrafik zur Darstellung von Rauch eingesetzt wird [14] (Abbildung 9). Ein unverzichtbares dramatisches Mittel in Actionfilmen und vielen Computerspielen ist schließlich, dass rundherum alles in die Luft fliegt und hinterher Rauch aufsteigt. Damit der simulierte Rauch realistisch aussieht, ist es wichtig, dass die Simulation wichtige qualitative Eigenschaften des physikalischen Systems korrekt wiedergibt. Deshalb sind auch hier strukturerehaltende Diskretisierungen von Vorteil.

Anmerkungen

1. Die Website ist <http://www.discretization.de>
2. Zum Beispiel: Das Geschwindigkeitsvektorfeld ist glatt und verschwindet im Unendlichen, und die Wirbelstärke hat kompakten Träger.

Literatur

- [1] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] M. Bergou, M. Wardetzky, S. Robinson, B. Audoly, and E. Grinspun. Discrete elastic rods. *ACM Trans. Graph.*, 27(3):63:1–63:12, Aug. 2008.
- [3] A. I. Bobenko, P. Schröder, J. M. Sullivan, and G. M. Ziegler, editors. *Discrete differential geometry*, volume 38 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [4] A. I. Bobenko and Y. B. Suris. Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top. *Comm. Math. Phys.*, 204(1):147–188, 1999.
- [5] A. I. Bobenko and Y. B. Suris. A discrete time Lagrange top and discrete elastic curves. In *L. D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics*, volume 201 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 39–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [6] A. I. Bobenko and Y. B. Suris. *Discrete differential geometry. Integrable structure*, volume 98 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [7] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. apud Marcum-Michaellem Bousquet, 1744.
- [8] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan. *Hamiltonian methods in the theory of solitons*. Classics in Mathematics. Springer, Berlin, english edition, 2007. Translated from the 1986 Russian original.
- [9] H. Hashimoto. Motion of a vortex filament and its relation to elastica. *Journal of the Physical Society of Japan*, 31:293, July 1971.
- [10] T. Hoffmann. Discrete Hashimoto surfaces and a doubly discrete smoke-ring flow. In *Discrete differential geometry*, volume 38 of *Oberwolfach Semin.*, pages 95–115. Birkhäuser, Basel, 2008.



Abbildung 9. Aufsteigender Rauch im Computeranimationsfilm Megamind [11]

- [11] *Megamind*. R.: Tom McGrath. USA: DreamWorks Animation. 2010. Fassung: DVD.
- [12] U. Pinkall, B. Springborn, and S. Weißmann. A new doubly discrete analogue of smoke ring flow and the real time simulation of fluid flow. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40(42):12563, Oct. 2007.
- [13] R. L. Ricca. Rediscovery of Da Rios equations. *Nature*, 352(6336):561–562, Aug. 1991.
- [14] S. Weißmann and U. Pinkall. Filament-based smoke with vortex shedding and variational reconnection. *ACM Trans. Graph.*, 29(4):115:1–115:12, 2010.
- [15] V. E. Zakharov, editor. *What is integrability?* Springer Series in Nonlinear Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

Prof. Alexander I. Bobenko und Prof. Dr. Boris Springborn
 Institut für Mathematik, MA 8-3, Technische Universität Berlin,
 Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin
 bobenko@math.tu-berlin.de
 boris.springborn@tu-berlin.de

Alexander Bobenko (geb. 1960) studierte Physik und Mathematik an der Universität St. Petersburg. Nach Promotion in mathematischer Physik (1985) war er beim Steklov Mathematischen Institut, Akademie der Wissenschaft UdSSR, beschäftigt. 1991 Habilitation in Geometrie über Flächen und integrable Differentialgleichungen. Seit 1993 Professor an der TU Berlin. Seine Forschungsinteressen liegen in der Geometrie, mathematischen Physik und Visualisierung: Diskrete Differentialgeometrie und ihre Anwendungen, Differentialgeometrie von Flächen, integrable Systeme, Riemannsche Flächen. Er ist Sprecher des SFB/Transregio 109 „Diskretisierung in Geometrie und Dynamik“.



Boris Springborn (geb. 1971) studierte Mathematik in Berlin und London. Promotion (2003) über Variationsprinzipien für Kreismuster und Habilitation (2008) an der TU Berlin. Ab 2011 Professor an der TU München. Seit 2013 an der TU Berlin. Seine Forschungsinteressen liegen auf dem Gebiet der Differentialgeometrie an der Schnittstelle zur diskreten Geometrie. Zur Zeit beschäftigt er sich hauptsächlich mit der Diskretisierung von konformen Abbildungen und anderen Konzepten aus der Funktionentheorie. Im SFB/Transregio 109 „Diskretisierung in Geometrie und Dynamik“ leitet er das Projekt „Diskrete Riemannsche Flächen“ zusammen mit Alexander Bobenko u. a.



Foto:
Jacek Ruta